Análisis de Resultados

Para la obtención de los resultados se realizaron dos scripts en MATLAB. En el primer script se realizó el calculo de los coeficientes de Fourier de manera manual y se transcribieron los resultados al código. En dicha simulación, los coeficientes An cuando n es mayor que 0, se cancelaban. Esta primera simulación resultaba valida para reconstruir la señal original a partir de la expresión de la serie de Fourier, sin embargo, evaluar los diferentes escenarios de pruebas planteadas en el trabajo como agregar espacios en blanco o modificar el periodo de la señal requeriría de cambios drásticos en la escritura y evaluación del código.

El anterior escenario fue motivación para realizar una segunda versión del script, que permitiera generalizar los escenarios planteados en el trabajo y permitiera alcanzar conclusiones completas del mismo.

El segundo código realiza los cálculos de los coeficientes de manera simbólica, los cuales luego son evaluados en vectores numéricos aumentando así su velocidad de procesamiento. El límite practico en tiempo de ejecución se encontró en un valor cercano a los 5000 armónicos. Sin embargo, debido a que no es necesaria tal cantidad de cálculos, se acotó el máximo posible de armónicos a 100, los cuales permiten de manera suficiente alcanzar los objetivos esperados del trabajo.

**Desarrollo del Objetivo Clave 1 – Reconstrucción de la señal**

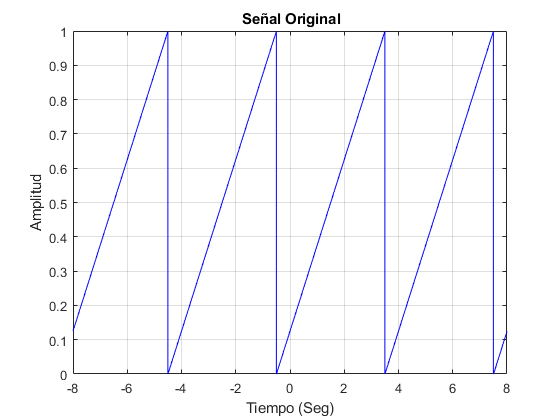
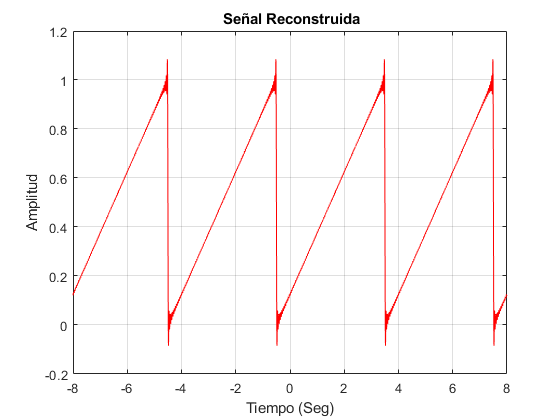


Figura 1 - Grafica de la señal reconstruida por las series de Fourier

Figura 2 - Grafica de la señal original

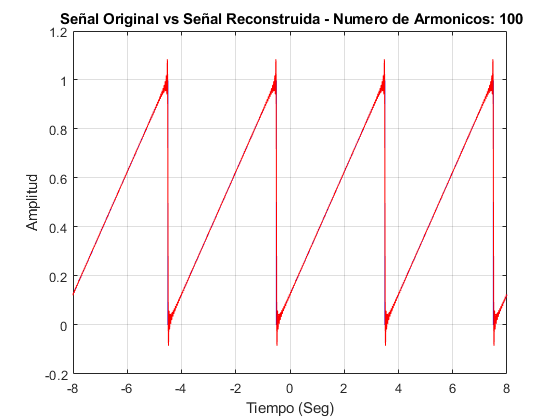
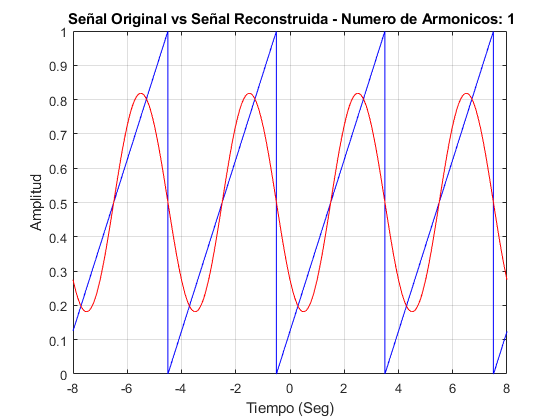
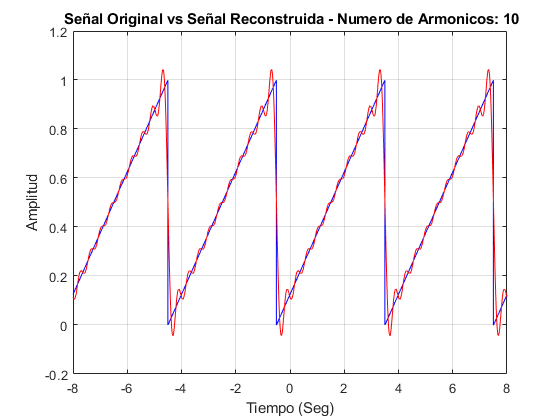


Figura 3 - Graficas sobrepuestas de la señal original y reconstruida

En las figuras 1, 2 y 3 se puede observar el principal resultado visible de esta simulación: Al desarrollar computacionalmente la sumatoria de la serie de Fourier se obtiene como resultado una señal gráficamente muy similar a la señal original. Se observan similitudes en las regiones continuas del diente de sierra o rampa. Sin embargo, como es de esperarse, las señales no son completamente idénticas, ya que en los puntos de discontinuidad de la señal periódica original se generan picos de amplitud explicados por el fenómeno de Gibbs. Las figuras anteriormente expuestas corresponden a una simulación realizada con la sumatoria de los 100 primeros armónicos. Mas adelante se abordarán escenarios de simulación con diferentes cantidades de armónicos en la serie.

**Desarrollo del Objetivo Clave 2 – Justificación del Numero de Coeficientes**

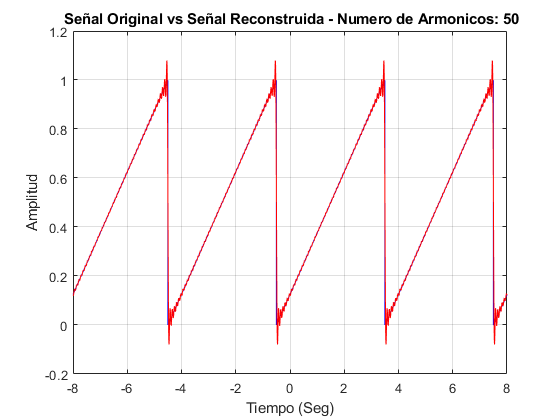
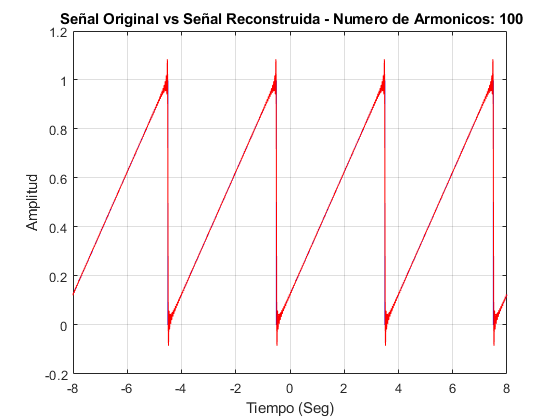
 

Figura 4 - Graficas sobrepuestas de las señales con 1,10,50 y 100 armónicos

Para justificar la cantidad de coeficientes o armónicos que son necesarios para reconstruir está señal de manera adecuada, se usaran dos criterios diferentes: **La igualdad de Parseval** y el **fenómeno de Gibbs evaluado en el punto de la discontinuidad.**

Se considerará que la cantidad de armónicos es suficiente cuando la relación entre los dos lados de la igualdad de Parseval **supere el 99% de similitud**, esto es:

Por lo tanto, para encontrar el ratio de similitud proponemos la siguiente expresión:

Evaluando en la simulación encontramos que en el armónico narm=15, el ratio de similitud supera el 99% ubicándose en 99.0198%. Esta es la señal reconstruida para ese número de armónicos:

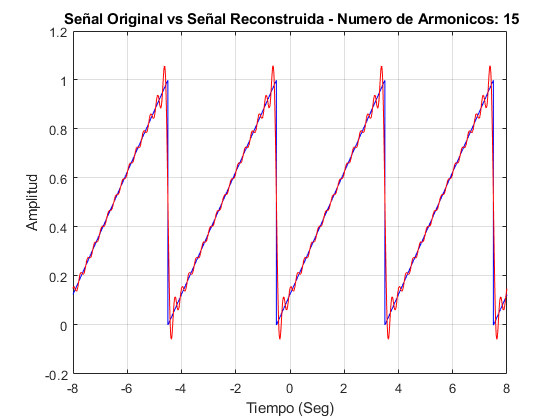


Figura 5 - Graficas sobrepuestas de las señales para 15 armónicos

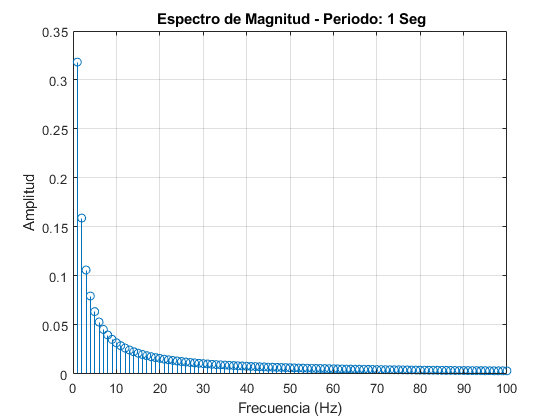
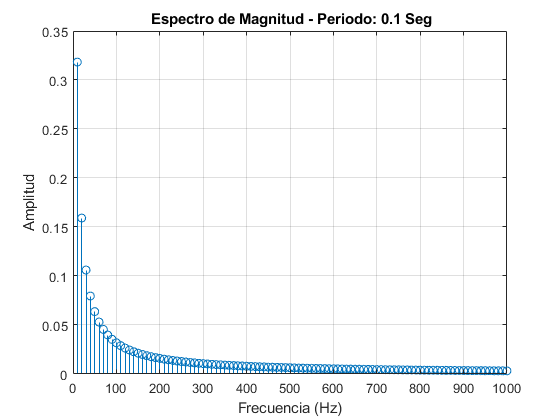
Como segundo criterio de confirmación de la cantidad de armónicos necesarios para la reconstrucción de la señal, evaluamos la vecindad de la discontinuidad en t=3.5 para confirmar que el valor de la señal reconstruida en la discontinuidad es igual a el valor medio de la suma de los limites por la izquierda y por la derecha en la señal original, es decir:

Donde que es el valor de la discontinuidad. Al evaluar en la simulación confirmamos que:

y por lo que se confirma que el fenómeno de Gibbs en la desigualdad converge a su valor medio. Por lo tanto, verificamos que 15 armónicos son suficientes para tener una reconstrucción aceptable de la señal.

**Desarrollo del Objetivo Clave 3 – Análisis del espectro de magnitud cuando el periodo T cambia**

Para desarrollar este objetivo clave se realizaron 4 escenarios diferentes de simulación variando la duración del diente de sierra, es decir, su periodo. Se realiza las simulaciones con un numero de 100 armónicos; esto se hace para poder apreciar mejor el espectro de magnitud discreto con los 100 valores obtenidos.



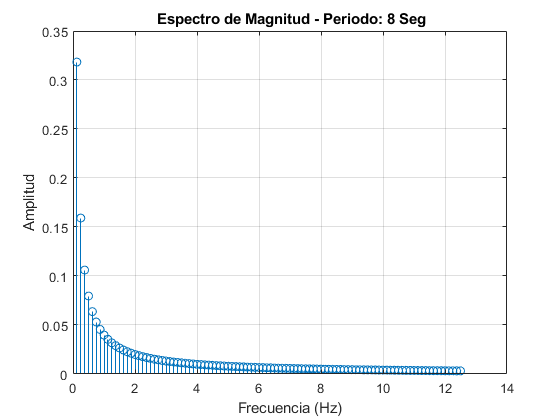
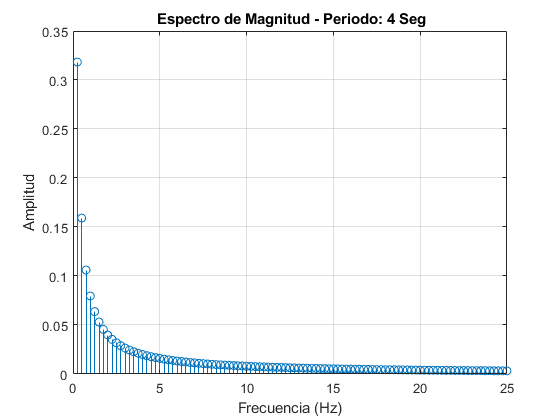


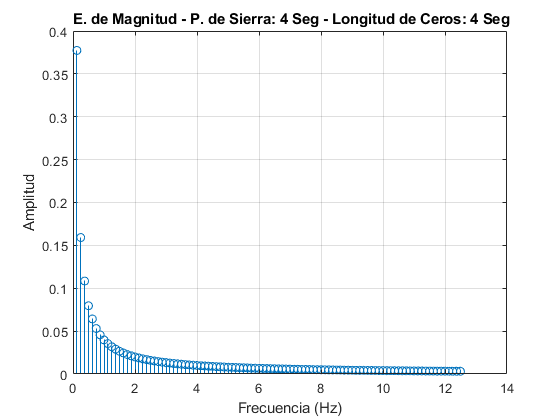
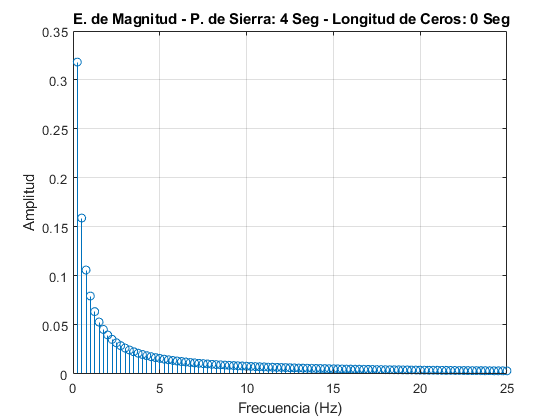
Figura 6 - Graficas del espectro de magnitud en 4 valores de T diferentes

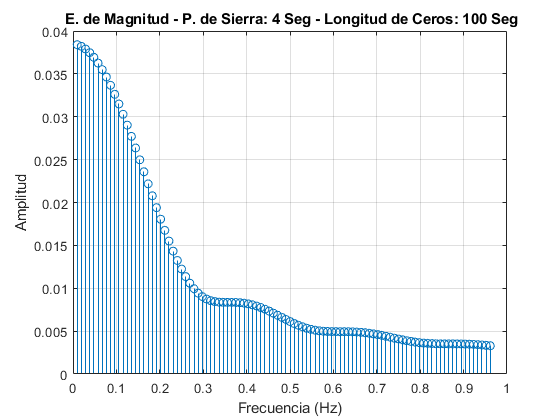
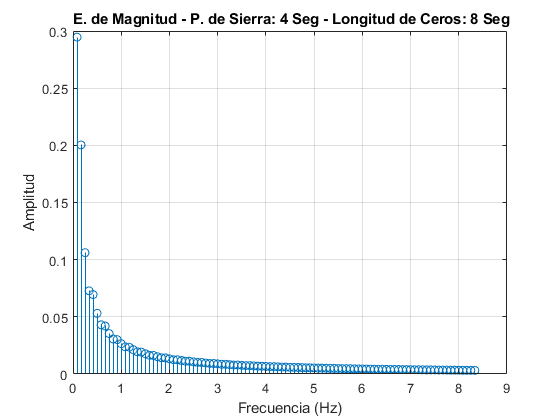
Se puede apreciar que las magnitudes de cada armónico se mantienen iguales en todos los periodos simulados. Esto indica que el **cambio en el periodo de la señal no afecta a las magnitudes** debido a que **la forma de la señal periódica permanece igual y el periodo es compensado por el cambio de la pendiente de la rampa**, por lo cual las integrales que definen a los coeficientes permanecen iguales ya que sus periodos se normalizan. Para el caso del eje de las frecuencias, la situación es diferente, debido a que un cambio en el periodo afecta directamente a la frecuencia.

Se puede concluir que un cambio en el periodo de la señal únicamente cambia el valor de frecuencia normalizada al que pertenece cada armónico. Para periodos mas pequeños, se tiene que la frecuencia aumenta, y para periodos grandes la frecuencia disminuye tal cual la definición formal de frecuencia:

**Desarrollo del Objetivo Clave 4 – Análisis del espectro de magnitud cuando se agregan ceros**

En este escenario se simulan ceros añadidos al terminar cada diente de sierra; el periodo del diente se mantiene constante en 4 segundos, y se varia la longitud de los ceros en 4 escenarios: sin ceros, 4 segundos, 8 segundos y 100 segundos de ceros. El periodo de esta **nueva señal resultante** está definido por: donde es el periodo de duración de los ceros y es el periodo del pulso diente de sierra. Este cambio en el periodo completo de la señal afecta directamente el calculo de los coeficientes debido al cambio que existe en la frecuencia fundamental dentro de las integrales. Para estos casos, los coeficientes An ya no se cancelan y se forman otro tipo de coeficientes basados en la función seno cardinal.





Se puede evidenciar que para este caso si existen cambios en las componentes del espectro de magnitud. Hay tres cambios principales:

1. Cambio en la amplitud de las magnitudes de los armónicos, los cuales tienden a disminuir cuando se aumenta la longitud de los ceros. Esto nos indica que entre mas se aumenten los ceros, la magnitud y por lo tanto la energía de la señal tiende a cero.
2. Cambio en la frecuencia normalizada de cada armónico debido al cambio de la frecuencia de la nueva señal resultante
3. Cambio en la diferencia de magnitud entre cada armónico la cual se presenta porque todos los armónicos sin excepción tienden a aproximarse a cero.

En la ultima grafica puede apreciarse que la envolvente del espectro de magnitud tiene la forma de un seno cardinal rectificado, pero sin cruces por cero, esto debido al cambio en la composición de los coeficientes antes mencionada.

**Desarrollo del Objetivo Clave 5 – ¿El número de coeficientes requeridos cambian cuando T cambia?**

Los valores que se toman para este escenario son , es decir, los mismos periodos que para el Objetivo 3 sin ceros añadidos; se adiciona el valor de 100 para llevar el periodo a un valor mucho más grande que el valor del periodo original de la señal original. En esta ocasión se limita a simular y comparar los resultados de la identidad de Parseval para cada uno de los periodos a evaluar y a observar el fenómeno de Gibbs en las discontinuidades, como se hizo en el objetivo 2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Numero de Armónicos*** | ***Periodo*** | ***Valor de la Relación de Parseval*** | ***Valor de la Serie en la discontinuidad*** | ***Valor medio en la discontinuidad*** |
| 15 | 0,1 | 99.0198 | 0.5 | 0.5 |
| 15 | 1 | 99.0198 | 0.5 | 0.5 |
| 15 | 4 | 99.0198 | 0.5 | 0.5 |
| 15 | 8 | 99.0198 | 0.4850 | 0.5 |
| 15 | 100 | 99.0198 | 0.5 | 0.5 |

De los valores en la tabla se puede concluir que el cambio en el periodo del diente de sierra no afecta el número de armónicos requeridos como mínimo para reconstruir la señal. Esto ocurre debido a que las funciones periódicas que componen a los coeficientes se ajustan proporcionalmente al ancho del pulso, modificando de forma proporcional su frecuencia fundamental.

Para el caso del valor de la serie en la discontinuidad para el periodo T=8, este desfase ocurre porque la simulación computarizada no tiene valores infinitos para definir el vector de tiempo y el vector de la serie de Fourier. Todos los valores son discretos, por lo que hay escenarios en los cuales el tiempo t no esta definido para el valor exacto donde se presenta la discontinuidad. Esto hace que se presente un error de cuantificación el cual se evade parcialmente en la simulación encontrando el valor más cercano a la discontinuidad y tomando ese valor.

**Desarrollo del Objetivo Clave 6 – ¿El número de coeficientes requeridos cambian cuando se agregan ceros?**